UTN UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL Mar del Plata **TECNICATURA UNIVERSITARIA EN INTERIORISMO**	**NOCIONES BASICAS DE FISICA Y MATEMATICA** **PROF.: Arq. PEDRO COLL** **Trigonometría básica.**	**GUIA DE TP 2**

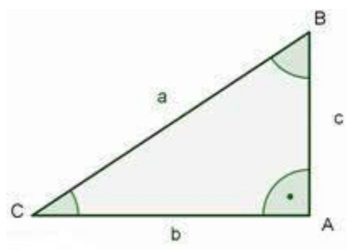
Resolver triángulos cualesquiera

Resolver triángulos *aplicando el teorema del seno y el teorema del coseno.*
Cálculo de distancias desconocidas.

Repaso de triángulos rectángulos

Problemas trigonometría. Resolver lados y ángulos de un ***triángulo rectángulo*** *aplicando la trigonometría, polígonos, triángulo isosceles.*

Relación lados y ángulos de un triángulo rectángulo



Relación entre los lados. Teorema de Pitágoras

Observa el triángulo rectángulo de la figura. Los lados son la hipotenusa a y los catetos b y c.

La relación entre los lados es el teorema de Pitágoras $\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2$

Relación entre sus ángulos

La suma de los 3 ángulos de un triángulo es siempre 180° $\Rightarrow$ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

En un triángulo rectángulo siempre hay un ángulo de 90° (recto), en la figura es $\hat{A} = 90°$

La suma de los otros dos ángulos también es 90° $\Rightarrow$ $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

Relaciones entre lados y ángulos : razones trigonométricas

Razones de $\hat{C}$

Leemos mirando por el ángulo C $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$ $\quad \cos\hat{C} = \frac{b}{a}$ $\quad \tan\hat{C} = \frac{c}{b}$

Razones de $\hat{B}$

Leemos mirando por el ángulo B $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$ $\quad \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ $\quad \tan\hat{B} = \frac{b}{c}$

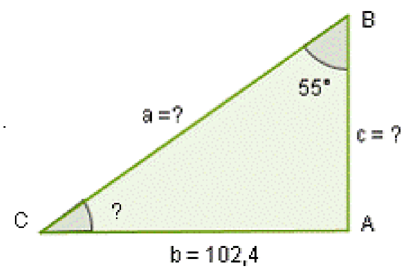
$\hat{B}$ y $\hat{C}$ son ángulos complementarios.

Ejercicios con triángulos rectángulos (ejemplos)

Resolver un triángulo es decir lo que valen sus 3 ángulos y sus 3 lados.

1. Resolver el triángulo rectángulo ABC sabiendo que el lado b = 102,4 m y el ángulo B = 55°.

Dibujamos un triángulo rectángulo. Escribimos los ángulos con letras mayúsculas, los catetos y la hipotenusa con letras minúsculas.



Calculamos el ángulo C $\Rightarrow$ $C = 90° - 55° = 35°$

Escribimos las razones del ángulos B y vemos de cual de ellas podemos obtener resultados.

$\text{sen } B = \frac{b}{a} \rightarrow \text{sen } 55° = \frac{102,4}{a} \rightarrow a = \frac{102,4}{\text{sen } 55°} = 125 \text{ m}$

$\text{tg } B = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg } 55° = \frac{102,4}{c} \rightarrow c = \frac{102,4}{\text{tg } 55°} = 71,7 \text{ m}$

2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide a = 25 m y el cateto b = 20 m. Resolver el triángulo.

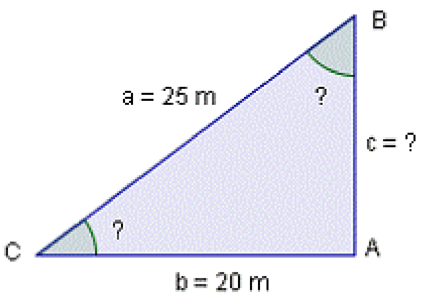
Dibujamos el triángulos con los datos que nos dan.

Calculamos el ángulo B $\Rightarrow$ $B = 90° - 36{,}86° = 53{,}15°$

Escribimos las razones del ángulo C y vemos de cual de ellas podemos obtener resultados.

$$\cos C = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \cos C = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad C = 36{,}86°$$

$$\text{sen } C = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad \text{sen } 36{,}86° = \frac{c}{25} \quad \rightarrow \quad c = \text{sen } 36{,}86° \cdot 25 \quad \rightarrow \quad c = 15 \text{ m}$$



Problemas aplicando trigonometría

- Con Triángulos isósceles

Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales y uno desigual.
Dos ángulos iguales y uno desigual.

La base de un triángulo isósceles mide 10 m y el ángulo opuesto 50º. Halla el área.

Trazamos la altura del lado desigual y se forman dos triángulos rectángulos. (ver figura)

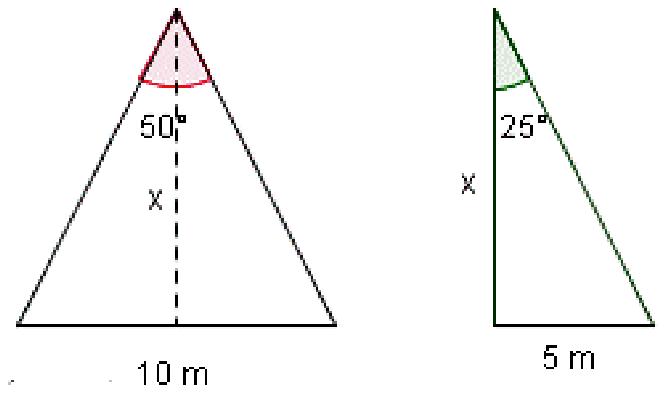
- Calculamos la altura x

Para calcular la altura "x" aplicamos la tangente, a uno de los triángulos rectángulos que se nos han originado al trazar la altura.

$$\tan 25 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \rightarrow \tan 25 = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{5}{\tan 25} \rightarrow x = 10{,}72 \text{ m}$$

- Área

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \rightarrow A = \frac{10 \cdot 10{,}72}{2} \rightarrow A = 53{,}6 \text{ m}^2$$



Problemas aplicando trigonometría

- Con Polígonos regulares

Los polígonos regulares están formados por triángulos isosceles, tantos como lados tenga el polígono.

El valor de los lados iguales es el radio de una circunferencia circunscrita.

Si es un hexágono los triángulos son equiláteros.

Hallar el área de un pentágono regular de lado 10 m.

- Por ser un pentágono está formado de cinco triángulos isósceles.

- Calculamos el valor del ángulo central α de cada uno de los triángulos isósceles.

$$\alpha = \frac{360}{5} = 72^{\circ}$$

- Sabemos que el lado L = 10 m

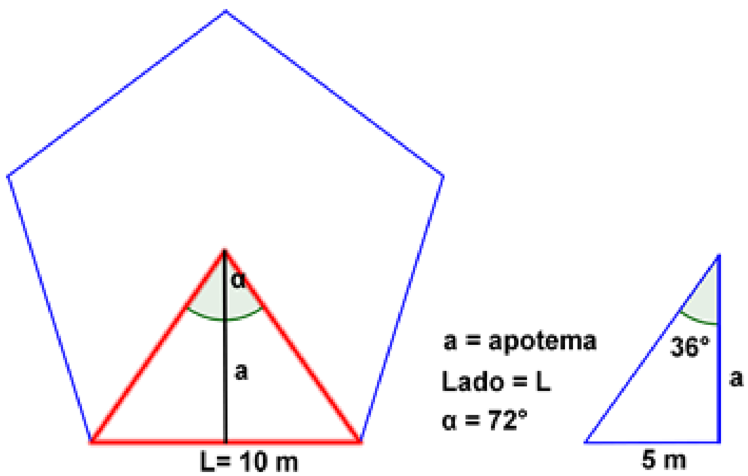
- La apotema a es la altura del triángulo isósceles.
  Al trazar la apotema nos quedan dos triángulos rectángulos.

  Conocemos el ángulo que será: $\frac{72}{2} = 36^{\circ}$

  Calculamos la apotema: $a = \frac{5}{\tan 36} = 6{,}9\ \text{m}$

- Área del polígono

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{(5 \cdot 10)\ 6{,}9}{2} = 172{,}5\ \text{m}^2$$



Problemas aplicando trigonometría

- Con un Rombo

Calcular los ángulos y el lado del rombo, de diagonales 12 y 6 cm. Ver figura .

Un rombo tiene los 4 lados iguales, y los 4 ángulos iguales dos a dos.
$\hat{B}$ y $\hat{D}$ agudos, $\hat{A}$ y $\hat{C}$ obtusos, entre todos suman 360º.

Las diagonales me originan 4 triángulos rectángulos.
El lado del rombo es la hipotenusa de los triángulos rectángulos.

- Calculamos el valor de los catetos de uno de los 4 triágulos rectángulos.

  Llamamos D a la diagonal mayor y d a la diagonal menor.
  D / 2 es un cateto del triángulo rectángulo 12 / 2 = 6 cm
  d /2 es el otro cateto 6 / 2 = 3 cm

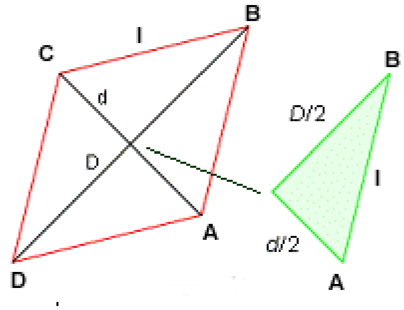
- Calculamos el ángulo B del rombo

  $\tan B/2 = 3/6 \Rightarrow \tan B/2 = 1/2 \Rightarrow B/2 = \operatorname{arctg} 1/2 = 26{,}56°$
  El ángulo B del rombo será $26{,}56 \cdot 2 = 53{,}12° \Rightarrow \hat{B} = 53{,}12°$

- Calculamos el ángulo A del rombo

  $A/2 = 90° - 26{,}56° = 63{,}44° \Rightarrow \hat{A}$ será $63{,}44 \cdot 2 \Rightarrow \hat{A} = 126{,}88°$

- Lado $\Rightarrow l = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$ cm



Resolución de triángulos no rectángulos

Teorema del seno

"Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos."

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

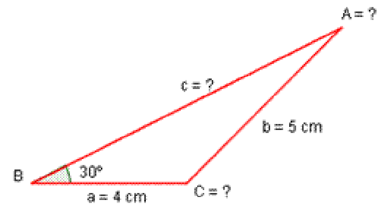
Aplicaciones:

a) Resolver un triángulo cuado conocemos dos ángulos y un lado.
b) Resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Ejemplo

Resolver un triángulo con los siguientes datos: a = 4 cm, b = 5 cm y B = 30º

- Dibujamos el triángulo, nombramos los ángulos y lados, colocamos los datos conocidos y resolvemos. Resolver un triángulo es decir lo que valen sus 3 ángulos y sus 3 lados.



- Calculamos el ángulo A, conocemos dos lados y el ángulo opuesto a b.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \frac{4}{\text{sen } A} = \frac{5}{\text{sen } 30º} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{4 \cdot 0,5}{5} = 0,4$$

$$A = \text{arcseno } 0,4 \quad \Rightarrow \mathbf{A = 23,58º}$$

- Calculamos c , conocemos dos ángulos y un lado.

El ángulo C: $C = 180º - (23,58º + 30) \Rightarrow \mathbf{C = 126,42º}$

El lado c aplicando $\frac{c}{\text{sen } 126,42º} = \frac{5}{\text{sen } 30º} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \text{sen } 126,42º}{\text{sen}30º} \Rightarrow \mathbf{c = 8,1 cm}$

Resolución de triángulos no rectángulos

Teorema del coseno

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$$

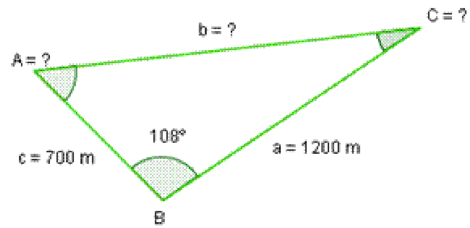
Aplicaciones:

a) Cuando conocemos los 3 lados.
b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
c) Dos lados y el ángulo que forman.

Ejemplo

Resolver un triángulo con los datos siguientes: a = 1200 m, c= 700 m y B = 108º

- Dibujamos el triángulo, nos dan 2 lados y el ángulo que forman, calculamos el lado b



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 1200\cdot 700\cdot \cos 108} \Rightarrow \mathbf{b = 1564{,}97\ m}$$

- Con a y b conocidos calculamos el ángulo C, despejando $\hat{C}$

$$\cos\hat{C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{700^2 - 1200^2 - 1564{,}97^2}{-2\cdot 1200\cdot 1564{,}97} \Rightarrow \cos C = 0{,}90 \Rightarrow \mathbf{C = 25{,}18º}$$

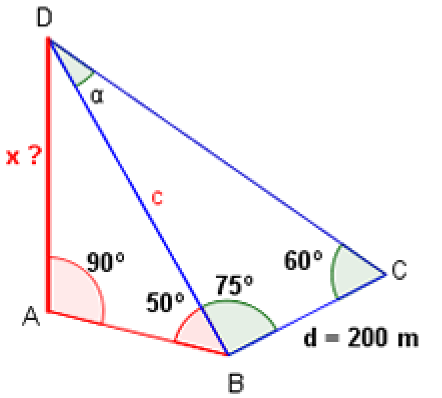
El ángulo C también lo podemos calcular aplicando el teorema del seno.

- Calculamos el ángulo A $\quad A = 180º - (108º+25{,}176º) \Rightarrow \mathbf{A = 46{,}82º}$

Aplicaciones de estos teoremas para calcular distancias desconocidas (puntos inaccesibles)

- Calcular una altura desconocida a cuyo pie no se puede llegar

Calcular la altura de la montaña AD



1. Fijamos dos puntos B y C y medimos su distancia d = 200 m
2. Medimos con el teodolito los ángulos ABD = 50°,
   DBC = 75° y BCD = 60°
3. Triángulo BCD calculamos α: α = 180° - (60° + 75) = 45 °
4. Aplicamos el teorema del seno para calcular c.

$$c = \frac{200.\text{sen}60°}{\text{sen}45°} = 245 \text{ m}$$

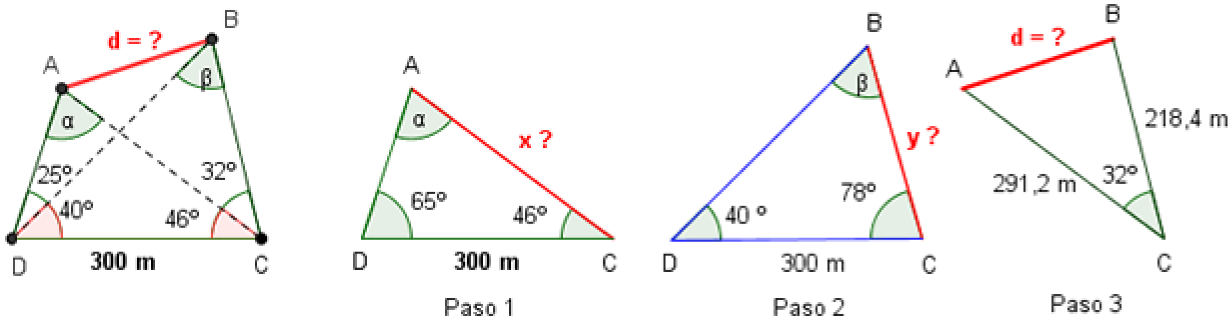
5. Calculamos x en el triángulo ABD

   x = c . sen 50° ; c = 245 . sen 50° = 188 m

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles

Calcular la distancia entre los puntos inaccesibles A y B

Datos que podemos medir: distancia CD = 300 m. Ángulos: ACB = 32°, ACD = 46°, ADB = 25° y BDC = 40°.



Paso 1. Calculamos x resolviendo el triángulo ACD

$\alpha = 180° - (65° + 46°)$; $\alpha = 69°$ $\quad$ $x = (300 \cdot \text{sen } 65°) / \text{sen } 69° = 291{,}2$ m

Paso 2. Calculamos y resolviendo el triángulo BCD

$\beta = 180° - (40° + 78°) = 62°$ $\quad$ $y = (300 \cdot \text{sen } 40°) / \text{sen } 62° = 218{,}4$ m

Paso 3. Calculamos d aplicando el teorema del coseno al triángulo ACB

$d^2 = (218{,}4)^2 + (291{,}2)^2 - 2 \cdot 218{,}4 \cdot 291{,}2 \cos 32$ $\quad$ $d = 157$ m

GUIA DE EJERCITACION PROPUESTA PARA TRIGONOMETRIA

1. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41°. Resolver el triángulo
2. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54°. Resolver el triángulo.
3. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.
4. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.
5. Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.
6. Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?
7. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°

8. Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

9. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.

10. La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia circunscrita.

11. El vigía de un barco pirata observa el punto más alto de un acantilado bajo un ángulo de 60°. Si el barco se aleja 100 m se observa bajo un ángulo de 45°. Calcula la altura del acantilado.

12. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles, sabiendo que su altura mide 10 m y que el ángulo desigual es de 120°.

13. Calcula la altura de una torre, sabiendo que a 300 m de su pie se ve bajo un ángulo de 10°.

14. Halla la altura de un edificio sabiendo que desde dos puntos alineados con la base y distantes entre sí 80 m, se ve bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente.

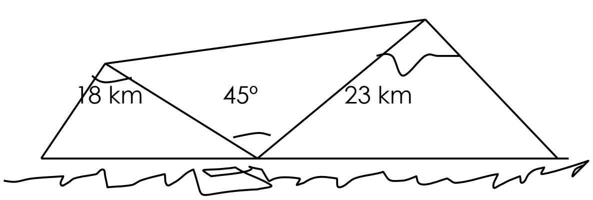
15. Dos caminos rectos que se cortan forman un ángulo de 30°. En uno de ellos, a 1000 m del cruce, hay una gasolinera. Encontrar la menor distancia desde la estación de gasolina hasta el otro camino.

16. Una carretera asciende 3m por cada 100 m de recorrido. ¿Qué ángulo forma con la horizontal?.

17. Completar el CUADRO para $\overset{\Delta}{abc}$, oblicuángulo.

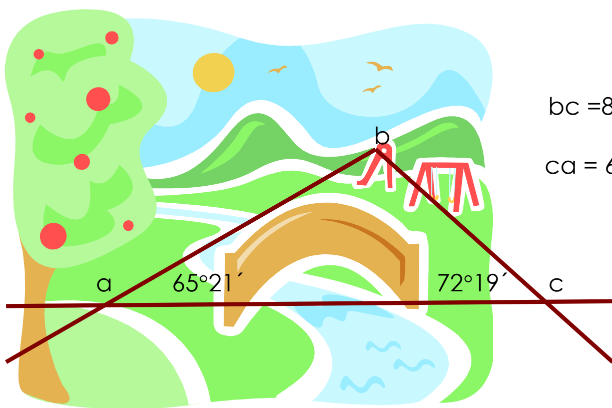
$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	A (m)	B (m)	C (m)
93º20’4’’		65º15’9’’			15
			8,2	7,4	6,1
18º3’20’’		79º18’30’’		1546	

18. Se quiere instalar una aerosilla entre los picos de dos montañas.



Calcular: La distancia que separa los picos de las dos montañas.

19. Se desea calcular la longitud ab, sabiendo que los extremos a y b están ubicados a ambas márgenes de un río.



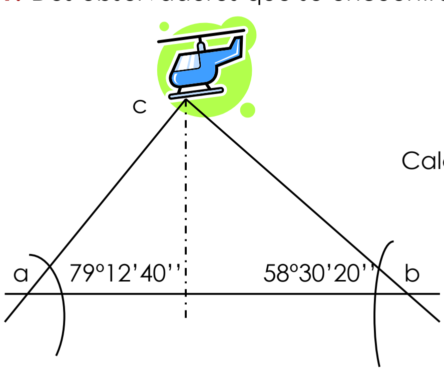
bc =874 m.

ca = 635 m.

20. Completar el CUADRO para $\overset{\Delta}{abc}$, oblicuángulo.

$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	A (m)	B (m)	C (m)
82°43'	79°5'12''		10		
			329,8	500	436,5
			5674,5	2345,6	4936

21. Dos observadores que se encuentran en a y b ven a un helicóptero parado. Sabiendo que ac es 158km.



Calcular: ¿ a qué altura está el helicóptero?

22. Halla la altura de una antena de radio si su sombra mide 100 m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30° con la horizontal

23. Averigua la distancia a la que se encuentra un castillo que está situado en la orilla opuesta de un río, sabiendo que la torre más alta del mismo se ve desde nuestra orilla bajo un ángulo de 40° y alejándonos 100 m del río el ángulo es de 25°.

24. Calcula el área de un decágono regular de 5 cm de lado.

25. En una circunferencia de 7 cm de radio trazamos una cuerda de 9 cm. ¿Cuánto mide el ángulo central que abarca dicha cuerda?

26. Halla los ángulos de un triángulo isósceles cuya base mide 50 cm y los lados iguales 40 cm cada uno.

27. Si vemos una chimenea bajo un ángulo de 30º, ¿bajo qué ángulo la veríamos si la distancia a la que nos encontramos de la misma fuese el doble? ¿Y si fuese el triple?

28. Halla los lados de un paralelogramo cuyas diagonales miden 20 cm y 15 cm respectivamente y forman un ángulo de 42º.

29. Julia y María caminan juntas, llegan a un cruce de caminos rectos que forman entre sí un ángulo de 50º y cada una toma un camino. A partir de ese momento, Julia camina a 4 km/h y María a 6km/h ¿A qué distancia estará Julia de María al cabo de una hora y media?

30. Dos de los lados de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm, y forman un ángulo de 32º. ¿Cuánto miden las diagonales?