PROPORCIONALIDAD Y TEORIA DE LA PROPORCION

EL NÚMERO DE ORO

Un número nada fácil de imaginar que convive con la humanidad porque aparece en la naturaleza y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño Es el llamado número de oro (representado habitualmente con la letra griega φ o también sección áurea, proporción áurea o razón áurea.

Tres números con nombre

Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que "paradójicamente" nombramos con una letra. Estos números son:

- El número designado con la letra griega π = 3,14159....(Pi) que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro (Longitud = 2. π.radio= π.diámetro).
- El número e = 2´71828......, inicial del apellido de su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece como límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- El número designado con letra griega ϕ = 1,61803... (Fi), llamado número de oro y que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que lo tuvo presente en sus obras.

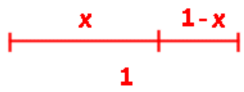
Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente). A estos números se les llama irracionales. Cuándo se utilizan se escriben solamente unas cuantas cifras decimales (en los tres ejemplos de arriba hemos tomado 5).

Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los dos primeros y el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación polinómica (a estos números se les llama trascendentes), mientras que el número de oro si que lo es.

Efectivamente, una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que da como resultado el número de oro.

La sección áurea y el número de oro

La sección áurea es la división armónica de una segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea. Tomemos un segmento de longitud uno y hagamos en el la división indicada anteriormente



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}\Rightarrow 1-x=x^2\Rightarrow x^2+x-1=0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es x= $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

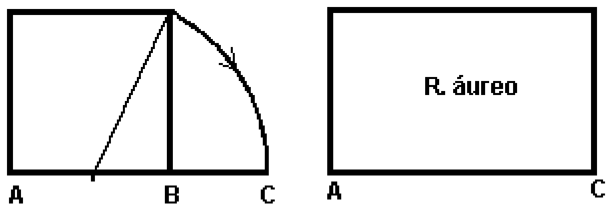
$$\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1'618...\Rightarrow \text{el numero de oro}$$

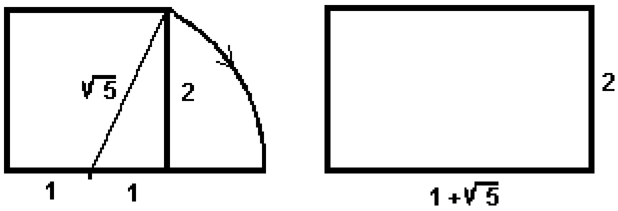
Es decir, la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento es el número de oro.

El rectángulo áureo

Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.

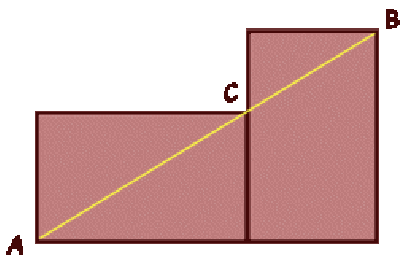


Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale $1+\sqrt{5}$ por lo que la proporción entre los dos lados es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nuestro número de oro).



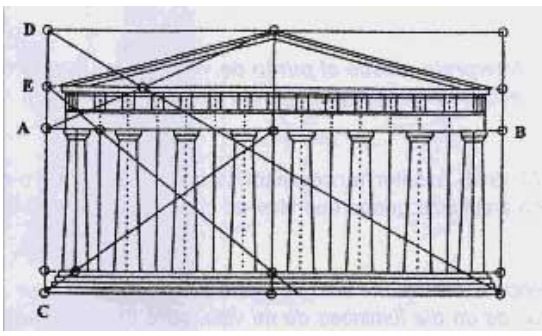
Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizando en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).

Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura, la diagonal AB pasa por el vértice C.



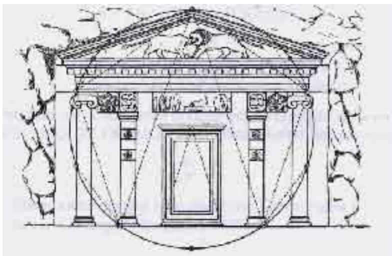
El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

El número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, ...
Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego.

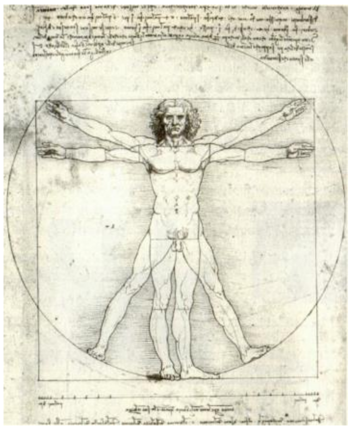


En la figura se puede comprobar que AB/CD= ϕ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD= ϕ y CD/CA= ϕ.

Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En **La Gran Pirámide de Keops**, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es $2\ \phi$.

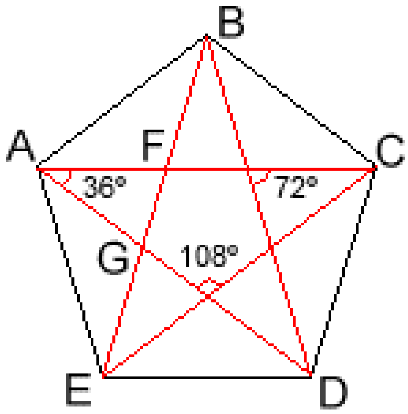


Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestro carnet de identidad y también en las cajetillas de tabaco. Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci**.



Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509. En dicho libro se describen cuales han de ser las proporcior las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cue sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los braz están extendidos y formando un ángulo de 90° con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

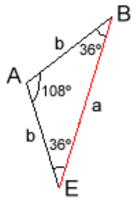
La trigonometría y el número de oro



Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36°, 72° y 108°. La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos ABE, ABF y AFG. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, que llamaremos: BE=a, AB=AE=b, AF=BF=AG=c y GF=d. Las longitudes de estos segmentos cumplen: a>b>c>d.

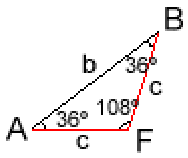
Consideremos cada uno de estos triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno.

Triángulo ABE



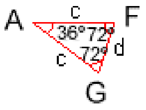
$$\frac{a}{\text{sen}108^\circ}=\frac{b}{\text{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Triángulo ABF



$$\frac{b}{\text{sen}108^\circ}=\frac{c}{\text{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Triángulo AFG



$$\frac{c}{\text{sen}\,72^\circ}=\frac{d}{\text{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{c}{d}=\frac{\text{sen}\,72^\circ}{\text{sen}36^\circ}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Como 72°=180°-108°, se verifica que sen72°=sen108°.

En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}=1,618033988\ldots$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro. Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que c=a-b y haciendo b=1:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\rightarrow a^2-a-1=0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (el numero de oro)

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea. Como consecuencia, se verifica $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$.